April 15, 2015

平成28年度　学部前期

解析力学及び演習（Aクラス）説明&仮想仕事

教科書：力学Ⅱ（原島　鮮　著，裳華房）

金用日：8限，9限，10限（15：35~18：00）

丸山　央峰

http://www.biorobotics.mech.nagoya-u.ac.jp/

授業内容

科目名:解析力学及び演習

単位数:2.5

授業形態:講義・演習

対象履修コース:機械・航空工学コース

講義の概要と達成目標:
　ニュートンの運動方程式を学習した上で，より普遍的なハミルトンの原理に基づいたラグランジュの運動方程式について理解し，具体的な問題を解析する方法を学ぶ．また，正準方程式と正準変換について理解する．さらに，応用例として，振動の一般論について学習する．

授業内容

バックグラウンドとなる科目：数学，力学Ⅰ，力学Ⅱ
数学1及び演習

授業内容

1．仮想仕事の原理（仮想変位，安定・不安定）
2．変分法（オイラー微分方程式，未定乗数法）
3．ダランベールの原理（慣性抵抗）
4．ハミルトンの原理（ラグランジアン，測地線，最小作用の原理）
5．ラグランジュの方程式（一般化座標，一般化力，質点系の運動）
6．名大祭
7．正準方程式（一般化運動，ハミルトン関数，ルジャンドル変換）
8．正準変換（Hamilton-Jacobiの偏微分方程式，ポアッソンの括弧式）
9．振動の一般論（平衡条件，直交関係，基準振動）
10．期末試験（7月末）

授業内容

注意事項：Aクラスは丸山，Bクラスは長谷川教授が担当する.

質問への対応

丸山央峰（航空・機械研究実験棟3F311室，内線5026
hisataka@mech.nagoya-u.ac.jp)

TA：菊川真希（航空・機械実験棟1階108室，内線5220
kikukawa@biorobotics.mech.nagoya-u.ac.jp）

時間外の質問は，講義終了後か教員室で受け付けます.
それ以外は，事前に担当教員に電話かメールでアポイントをとること.

講義の受け方について

- パワーポイントで講義を行う.
  ノートは取らなくてよい．講義資料は新井研HPにアップします．

- 演習の問題は印刷したものを配布する.
  演習で配布したプリントは当日回収し，出席の確認に用いる.

- 宿題はNUCT経由での提出または紙ベースでの提出とする.
  提出期限は，翌週の講義の演習の前まで

- 演習問題がそのままテストにでることはありません.
  演習は新しい概念の理解のためのものです．その理解度をテストでみます．演習は単に公式を利用するためのものではありません.

14．仮想仕事の原理(14.1仮想変位)

力学的体系の構造の記述

・体系の運動を調べるには最小限の知識があればよい．

例:「ねじ」の運動　→ ピッチのみ(形状，材質等は不要)

・空間を自由に運動する体系 ← 束縛条件

自由さが制限される －－－－－－自由度

自由度の数だけ座標を指定すれば，体系の全ての点の運動は決まる．

・球面上に束縛された「質点」:天頂角θ，方位角φ　2自由度

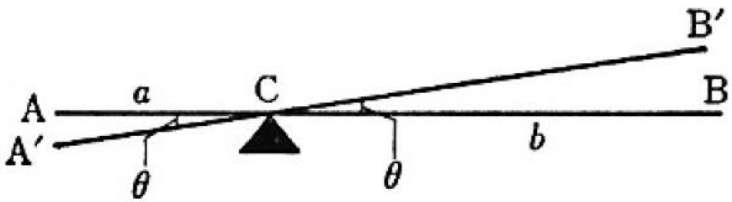
・上端を固定された棒に固定された質点からなる「振り子」 1自由度

・上端を固定された糸に固定された質点からなる「振り子」 ？？？

・支点に固定された「てこ」

てこの左右の腕の長さ:a, b

支点回りの回転角度θに比例する変位:aθ，bθ



14.1－1 図

14．仮想仕事の原理(14.1仮想変位)

天井からつるされた糸，動滑車，定滑車，おもりからなる体系

動滑車側のおもりの変位　h

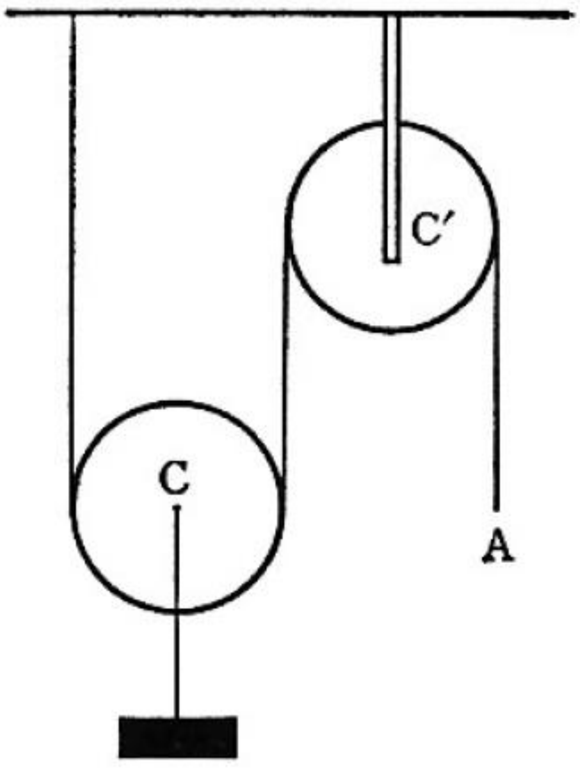
定滑車側のおもりの変位　2h

このよに，束縛条件を破らない可能な変位を行ったとき，体系の各部の変位が互いに独立(多自由度)か，あるいはある比率(1自由度)になっているかにより体系の運動がきまる．(時間の経過に伴う実際の変位 dh とは異なる)．

仮想変位　δh

・仮想変位というのは，体系の力学的構造を述べているだけで比だけが重要である．

・つりあい，運動等の話の以前のことである．



14.1－2 図

14. 仮想仕事の原理(14.2仮想変位の原理)

仮想変位をさせるには体系に力が加えられ仮想的な仕事がなされる

力の種類

・束縛力でない力(直接の力，加えられた力：既知の力)

$$F_i(X_i, Y_i, Z_i)$$

・束縛力(加えられた力と束縛条件のつり合いの式を経てはじめて決定されるもので未知量の力)

$$S_i(S_{xi}, S_{yi}, S_{zi})$$

i番目の質点のつりあい

$$X_i + S_{xi} = 0, Y_i + S_{yi} = 0, Z_i + S_{zi} = 0$$

仮想仕事(Virtual Work)の導入

$$\delta W = \sum \left\{ (X_i + S_{xi})\delta x_i + (Y_i + S_{yi})\delta y_i + (Z_i + S_{zi})\delta z_i \right\}$$

ここで，変位と力の方向を合わせておくことに注意(仕事の正負)!!

14．仮想仕事の原理（14.2仮想変位の原理）

仮想仕事の原理

束縛力が仕事を行わないような体系で，これがつりあうのに必要で十分な条件は，この体系が束縛条件を破らない範囲でその構造上許されている任意の変位8仮想変位)を考えて，これに対する加えられた力の行う仕事を考えるとき，その和が0になることである.

$$\delta' W = \sum \left\{ X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i \right\} = 0$$

加えられた力が保存力だけの場合，位置エネルギをUとして

$$\delta' W = -\delta U = 0$$

一様な重力場の場合，重心の高さをZgとすると，　$U = MgZg$
したがって，

$$\delta Zg = 0$$

14．仮想仕事の原理(14.2仮想変位の原理)

仮想仕事の原理の証明

・必要条件　→

$$X_i + S_{xi} = 0, Y_i + S_{yi} = 0, Z_i + S_{zi} = 0$$

より明らか。

・十分条件　←　対偶法で証明

つりあわないとすると，各失点は実際に動き出す

$$m_i \frac{d^2 x}{dt^2} = X_i + S_{xi}, m_i \frac{d^2 y}{dt^2} = Y_i + S_{yi}, m_i \frac{d^2 z}{dt^2} = Z_i + S_{zi},$$

これらの式にδxi，δyi，δziを掛けて加え，その上iについて加えると

$$\sum m_i \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z_i \right)$$

$$= \sum \left(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i \right) + \sum \left(S_{xi} \delta x_i + S_{yi} \delta y_i + S_{zi} \delta z_i \right)$$

14．仮想仕事の原理(14.2仮想変位の原理)

右辺第2項は仮定(束縛力が仕事を行わない)により0である.
左辺は，各質点の動き出す方向を仮想変位の特別な場合と考えると
その方向と加速度の方向は一致しているので，

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z_i > 0$$

よって，

$$\sum\left(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i\right) > 0$$

したがって，背理法によって証明された.

※　背理法：ある命題 P を証明したいときに、P が偽であると仮定して、そこから矛盾を導くことにより、P が偽であるという仮定が誤り、つまり P は真であると結論付けることである。(Wikipediaより)

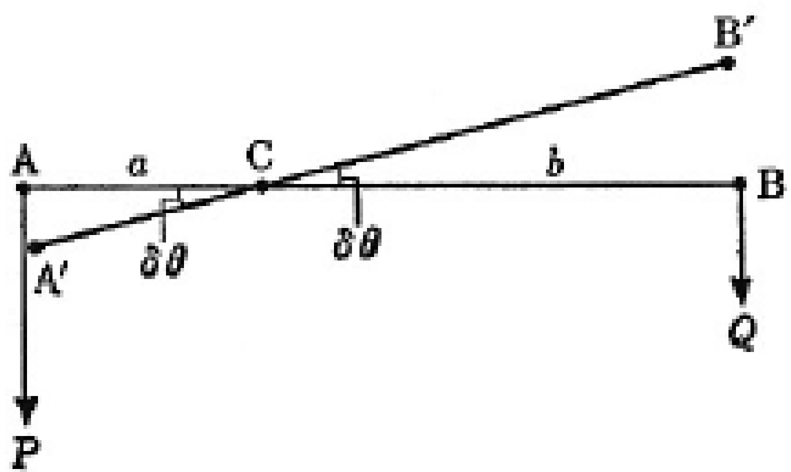
14．仮想仕事の原理（14.2仮想変位の原理）

例：てこのつり合い（教科書p6）

＜解＞
仮想仕事の原理より

$$\delta' W = \sum \left(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i \right)$$
$$= \left\{ X_A \delta x_A + Y_A \delta y_A + Z_A \delta z_A \right\} + \left\{ X_B \delta x_B + Y_B \delta y_B + Z_B \delta z_B \right\}$$
$$= \left\{ 0 \times 0 + P \times (a\delta\theta) + 0 \times 0 \right\} + \left\{ 0 \times 0 + Q \times (-b\delta\theta) + 0 \times 0 \right\}$$
$$= \left(Pa - Qb \right) \delta\theta = 0$$

したがって， $Pa = Qb$



14.2－1 図

14. 仮想仕事の原理(14.2仮想変位の原理)

例:3個の動滑車(重さ無視)と
　1個の定滑車のつり合い

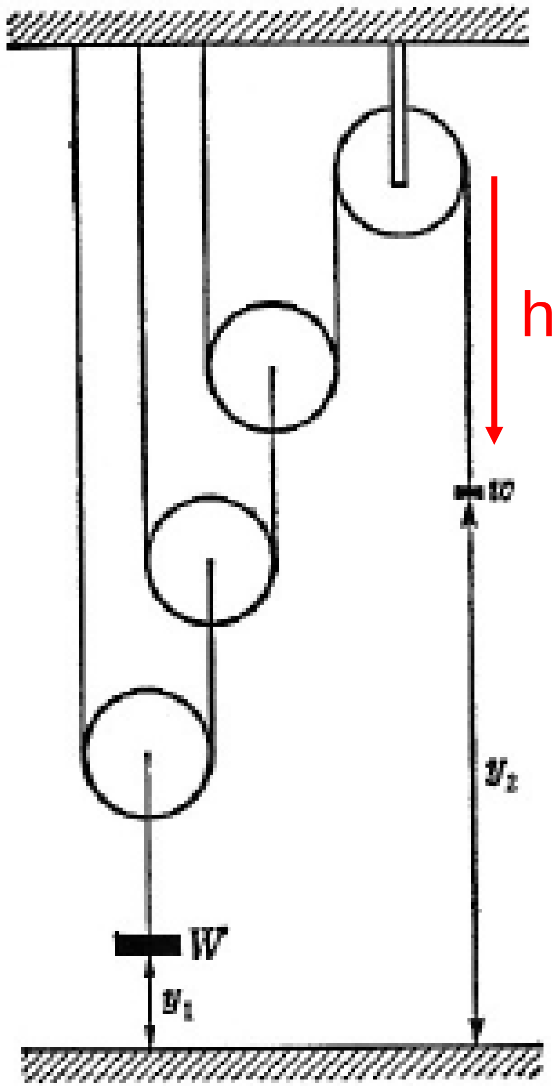
<解>
仮想仕事の原理より, おもりの重さをW, w
(質量でなく)として

$$\delta' W = (-W)\delta y_1 + (-w)\delta y_2$$

$$= (-W) \times \frac{h}{8} + (-w) \times (-h) = 0$$

したがって　$w = \frac{W}{8}$

※変位は上向きを正とする.
※hはおもさwのおもりの変位とした.



14.2－2 図

14．仮想仕事の原理（14.2仮想変位の原理）

例：3個の動滑車（重さ無視）と
1個の定滑車のつり合い

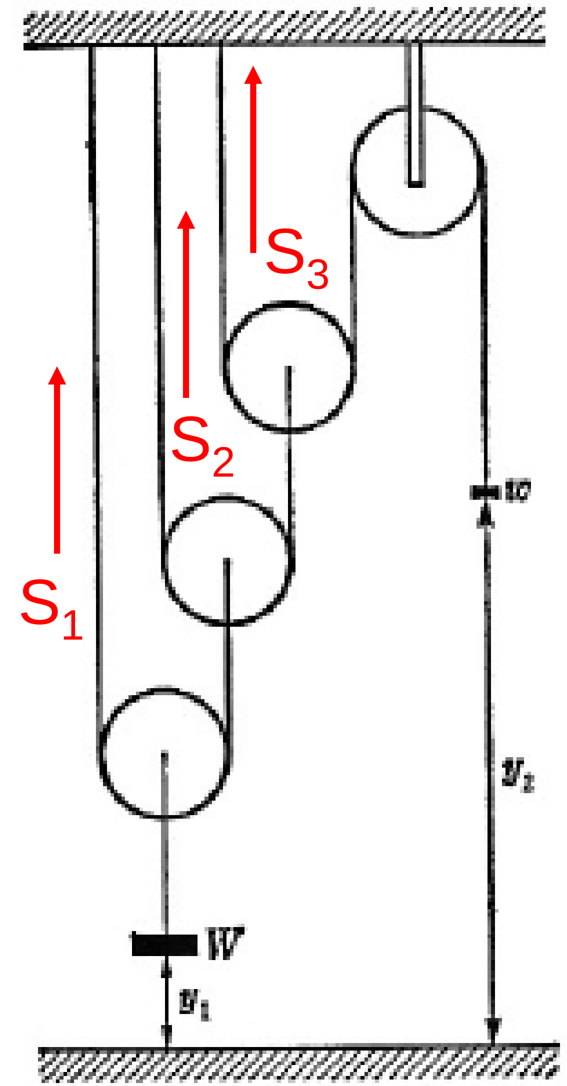
＜別解＞
力のつりあいより

$$W - 2S_1 = 0 \quad\quad S_1 = 0.5W$$

$$S_1 - 2S_2 = 0 \quad\quad S_2 = 0.25W$$

$$S_2 - 2S_3 = 0 \quad\quad S_3 = 0.125W$$

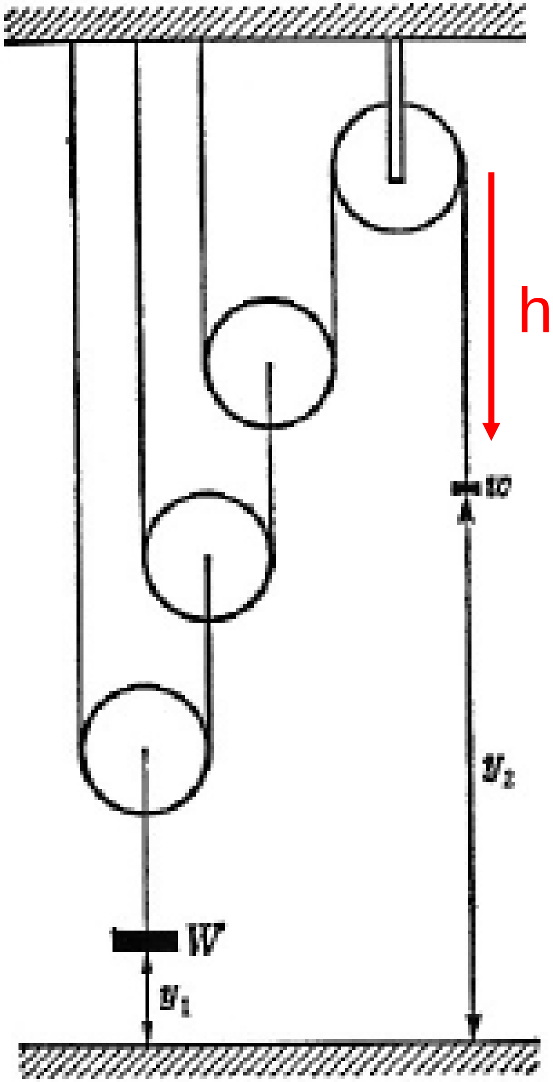
$$w - S_3 = 0 \quad\quad w = S_3 = 0.125W$$



14.2－2 図

14. 仮想仕事の原理(14.2仮想変位の原理)

例:3個の動滑車(重さをGとする)と
1個の定滑車のつり合い



14.2－2 図

＜解＞
仮想仕事の原理より, おもりの重さをW, w
(質量でなく)として

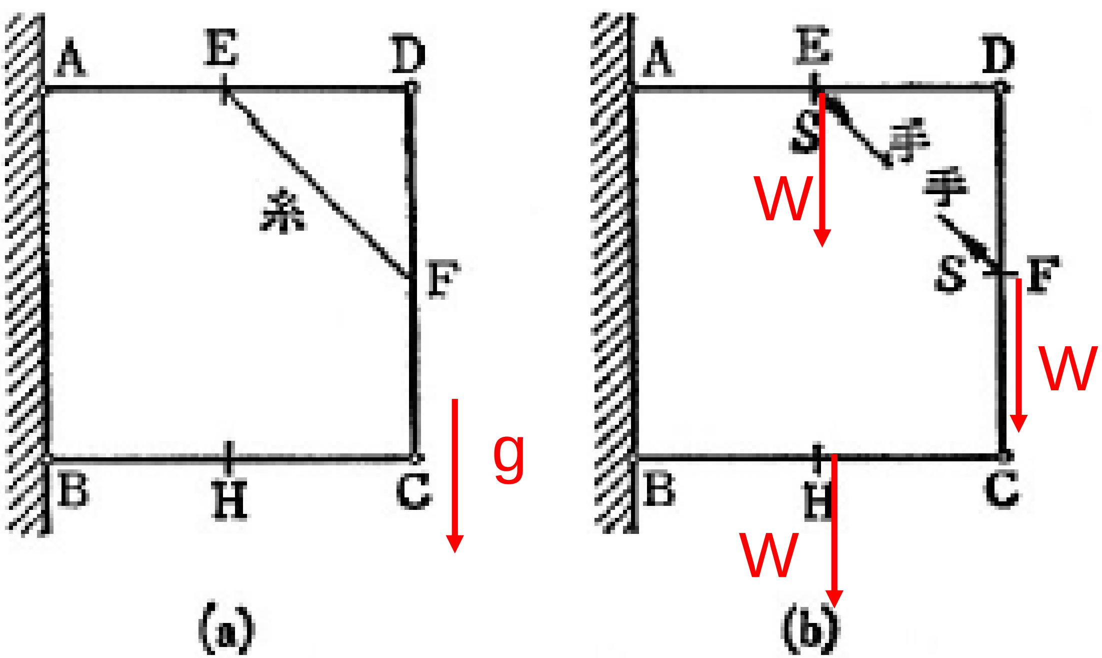
$$\delta' W = (-W - G) \times \frac{h}{8} + (-G) \times \frac{h}{4} + (-G) \times \frac{h}{2} + (-w) \times (-h) = 0$$

$$-W - G - 2G - 4G + 8w = 0$$

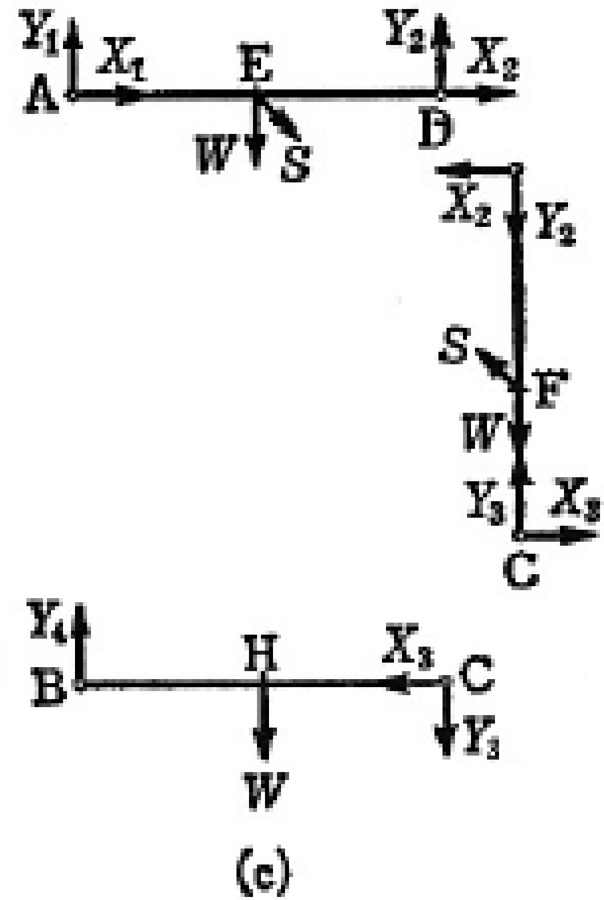
したがって $w = \dfrac{W + 7G}{8}$

14．仮想仕事の原理（14.2仮想変位の原理）

例：壁に連結された3本の棒が正方形に保持された径のつり合い



14.2－3 図

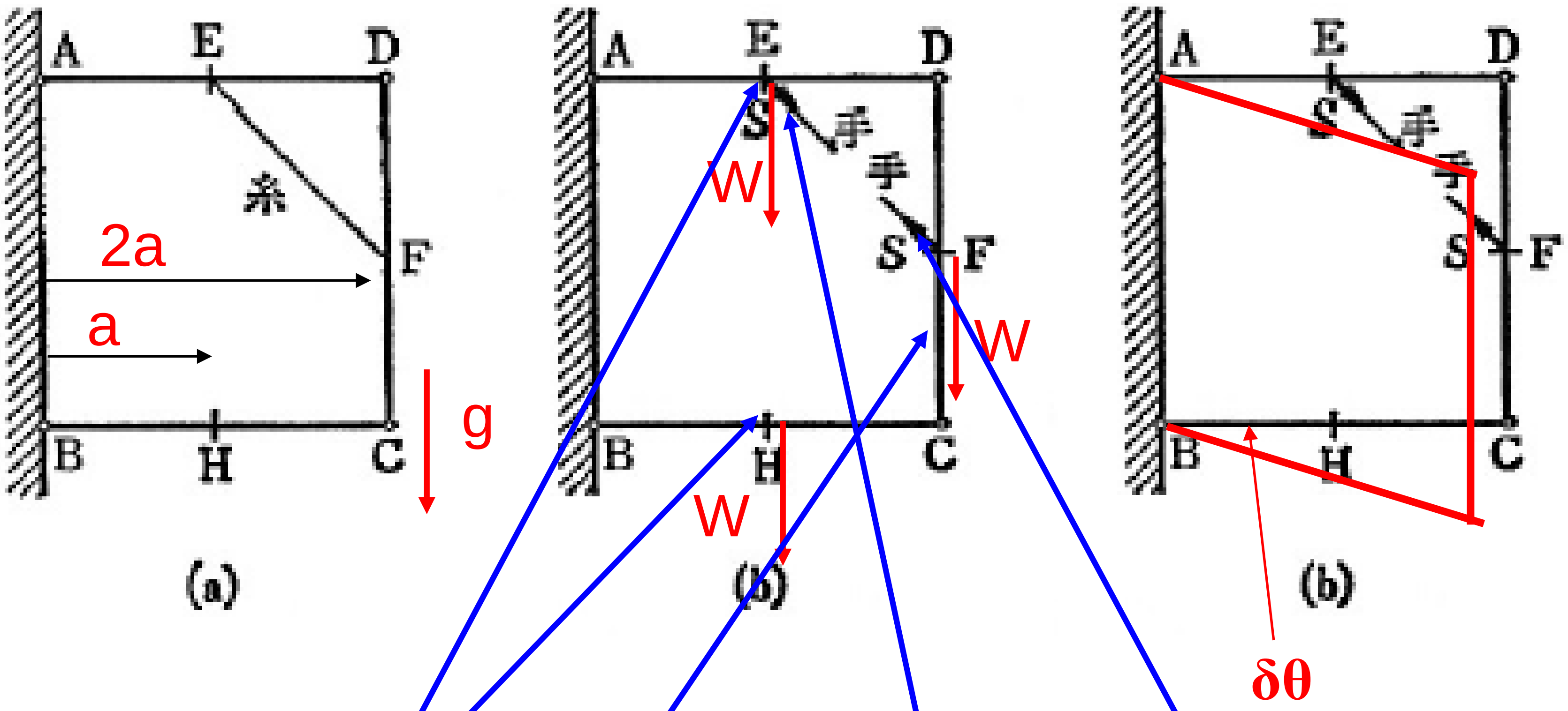


別解

変位は下向きを正
（角度は時計回りを正）

14. 仮想仕事の原理(14.2仮想変位の原理)

例：壁に連結された3本の棒が正方形に保持された径のつり合い



$$\delta' W = (2\times Wa\delta\theta + W2a\delta\theta) + \left(\frac{S}{\sqrt{2}}a\delta\theta\right) + \left(-\frac{S}{\sqrt{2}}2a\delta\theta\right) = 0$$

14．仮想仕事の原理(14.2仮想変位の原理)

例：壁に連結された3本の棒が正方形に保持された径のつり合い

＜解＞

仮想仕事の原理より，仮想変位をδθとして

$$\delta' W = (2 \times W a \delta\theta + W 2a\delta\theta) + \left(\frac{S}{\sqrt{2}} a\delta\theta \right) + \left(-\frac{S}{\sqrt{2}} 2a\delta\theta \right) = 0$$

したがって，　$S = 4\sqrt{2}W$

＜別解＞

角棒AD，CD, BCについて，X方向の力，Y方向の力，指定した点周りのモーメントのつり合い条件からSを求める.

つまり，未知の束縛力とSを含む9個の式をたてて解く.

14．仮想仕事の原理(14.2仮想変位の原理)

例：壁に連結された3本の棒が正方形に保持された径のつり合い

＜別解＞
力のつり合いより

$$X_1+\frac{1}{\sqrt{2}}S+X_2=0,\ Y_1-W-\frac{1}{\sqrt{2}}S+Y_2=0,\ -aW-\frac{a}{\sqrt{2}}S+2aY_2=0$$

A点まわり

$$-X_2-\frac{1}{\sqrt{2}}S+X_3=0,\ -Y_2-W-\frac{1}{\sqrt{2}}S+Y_3=0,\ -\frac{a}{\sqrt{2}}S+2aX_3=0$$

D点まわり

$$X_4-X_3=0,\ Y_4-W-Y_3=0,\ -aW-2aY_3=0$$

B点まわり

の式を解けばSが求まる.

14．仮想仕事の原理(14.2仮想変位の原理)

仮想仕事の原理の利点

・不用な束縛力を使わなくて済む.

・“仕事はスカラーである”ため，代数的に加えるだけでよい.

仮想仕事の原理を用いると，場合によっては問題が簡単に解けることもあるが，それよりもこの章以降の論理展開の基礎となる点が重要である.

束縛力による仕事を入れると仮想仕事の原理を使う意味がない.

14．仮想仕事の原理（14.2仮想変位の原理）

δUはδθに対して全微分展開と同様に次式で表される.

$$\delta U = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_k} \delta\theta_k \right)$$

このδUが任意の仮想変位δθに対して0となるためには
全ての微分係数が0でないといけない.

δUは下記の形にかけるときのみ完全微分及び全微分と呼ばれる.

$$dU = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_k} \delta\theta_k \right)$$

このとき線微分 $\int_P^Q dU$

は積分の経路には依存せず，P点とQ点における値だけできまる.

14. 仮想仕事の原理(14.3つりあいの安定と不安定)

安定・不安定の定義

つりあいの状態で外乱を加えたとき，元にもどれば安定，ますます遠ざかれば不安定，ずれた位置で留まれば中立

つりあいの条件(保存力の場合)

$$\delta U = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_k} = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots, f)$$

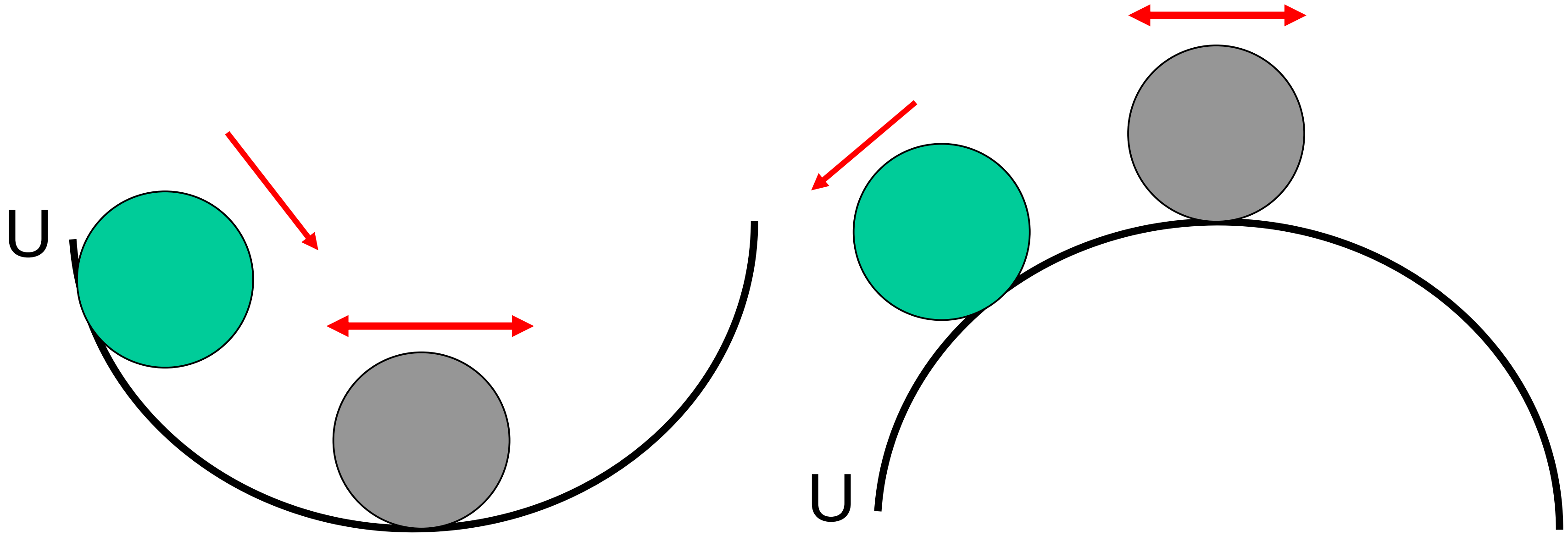
したがって，つり合い状態ではUは極大または極小となる.
質点系をつり合いの位置から少しずらして初速度0で離すと，実際に時間の経過とともに，次式を満たすように運動する.（証明はp11を読んでおくこと）

$$dU < 0$$

したがって

・Uの全ての2階微分が正(Uが極小)の時，安定
・Uの一つ以上の2階微分が負(極大)の時，不安定
・Uの2階微分が0のとき，不明(さらに高階の微分係数の正負に依存)

14. 仮想仕事の原理(14.3つりあいの安定と不安定)



安定　　　　　　　　　　　不安定

直感的に考えると

Uの極値にある物体が，少し動いたとき，

元の位置にもどれば安定

元の位置にもどれば不安定

宿題

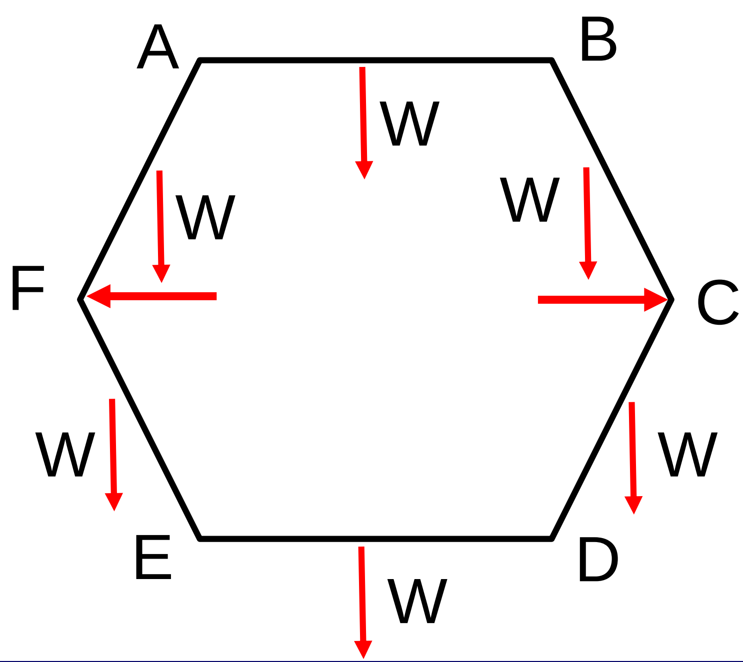
教科書14章の問題1
教科書14章の問題3

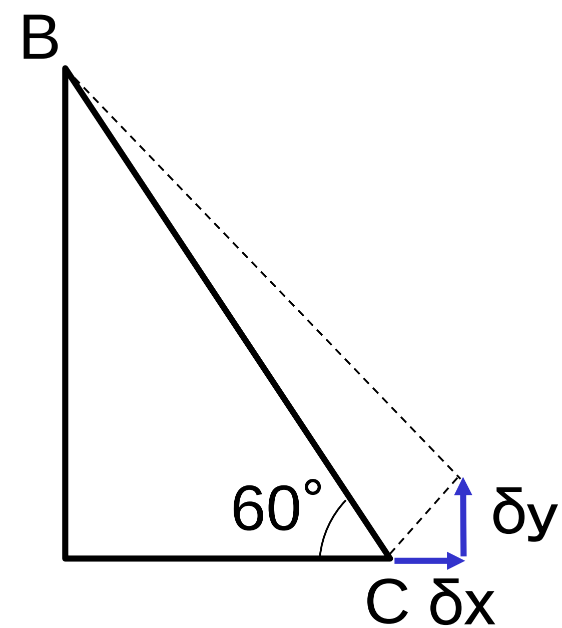
次回の冒頭に解説します.

演習　1

演習1　重さがみなWで長さの等しい6本の棒を，滑らかなちょうつがいで連結して正六角形ABCDEFを作り，CFを重さの無視できる棒で連結し，棒ABの部分を水平にし，その中点で全体をつるす場合，CFにかかる力Rを仮想仕事の原理から求めよ（図1）

点CとFが力Rにより外側にδθだけ回転するという仮想変位を考えると，これにともない水平方向にδx拡がり，鉛直方向にδy上昇する．





演習　1

＜解＞

$$\delta x = a\sin\left(\frac{\pi}{6}+\delta\theta\right) - a\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\delta\theta + O(\delta\theta^2) \cong \frac{\sqrt{3}}{2}a\times\delta\theta$$

$$\delta y = a\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - a\cos\left(\frac{\pi}{6}+\delta\theta\right) = a\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\delta\theta + O(\delta\theta^2) \cong \frac{1}{2}a\times\delta$$

仮想仕事の原理より

$$-W\left(1\times 0 + 2\times\frac{1}{2}\delta y + 2\times\frac{3}{2}\delta y + 1\times 2\delta y\right) + 2\times R\delta x = 0$$

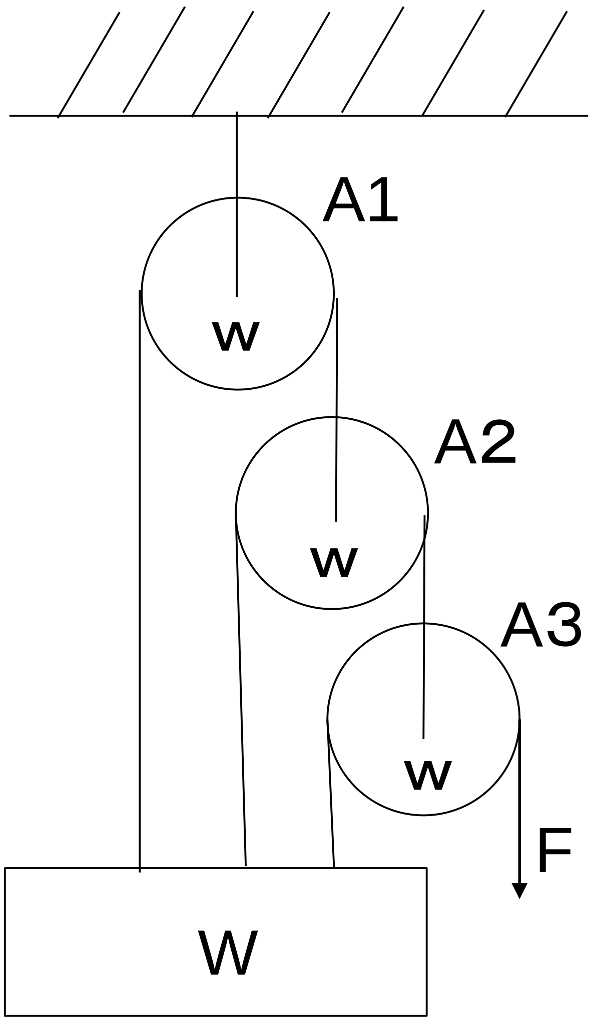
$$-6W + 2\sqrt{3}R = 0$$

$$R = \sqrt{3}W$$

演習　2

演習1　重さwの相等しい3個の滑車を図のようにつるし，重さWの重りを上げるには，最後の綱にいかほどの力を加えたらよいか

重さWのおもりの仮想変位を鉛直上向きにδx とすると，これに伴い，同滑車A2は鉛直下向きにδx，A3は鉛直下向きに3δx，力Fの作用点は鉛直した向きに7δxだけ変位する.



演習　2

＜解＞　重さWのおもりの仮想変位を鉛直上向きにδxとすると，これに伴い，
同滑車A2は鉛直下向きにδx，A3は鉛直下向きに3δx，力Fの作用点は
鉛直した向きに7δxだけ変位する．

この時，仮想仕事は

$$W \times (-\delta x) + w \times \delta x + w \times 3\delta x + F \times 7\delta x = 0$$

$$-W + 4w + 7F = 0$$

$$F = \frac{W - 4w}{7}$$