

April 22, 2016

平成28年度 学部前期

解析力学及び演習(Aクラス) 変分法&ダランベールの原理

教科書: 力学Ⅱ (原島 鮮 著, 裳華房)

金用日: 8限, 9限, 10限 (15:35~18:00)

丸山 央峰



<http://www.biorobotics.mech.nagoya-u.ac.jp/>



15. 变分法(15.1变分法)

汎関数：関数の関数

$$I = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx \quad y' \equiv \frac{dy}{dx}$$

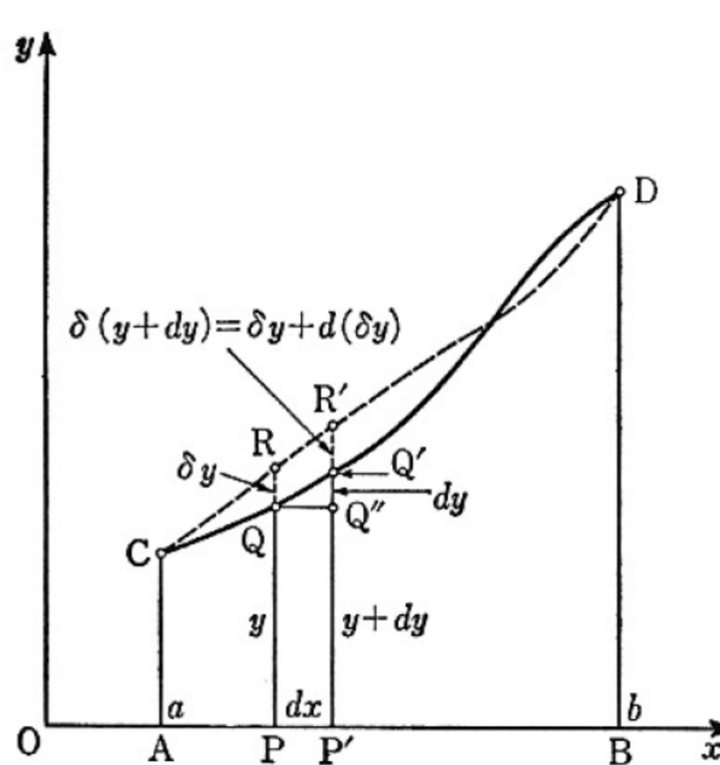
$x=a$, $x=b$ では, y の値は変えないで, その間の x に対する y の値をいろいろと変えるとき, I の値が極地をとるような関数 $y(x)$ はどのような関数形であるかという問題を考える.

そのような関数が求められたとし、
そのからのずれを変分 δy とよぶと、

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx$$

$$\text{右図より, } \delta(dy) = d(\delta y) \quad \text{即ち} \quad \delta y' \equiv \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dx} (\delta)$$

極値をとる: 曲線の形状を極微小だけ変化させたとき I の変化が零であること



15.1-1 义



15. 変分法(15.1変分法)

よって

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d(\delta y)}{dx} \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y \right) dx + \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right|_a^b}_{=0} - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \right) dx \\ \delta I &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \delta y dx\end{aligned}$$

Iが極値をとるためには, $\delta I=0$, δy は任意なので

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$f(x, y(x), y'(x)) = f(x)$$

左辺では, x, y, y' は独立と考える

あるいは, 合成関数の微分公式より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

与えられた変分法の問題についてのEulerの微分方程式



15. 変分法(15.1変分法)

例1 平面上の2定点の長さが極小となる曲線を求めよ.

<解>

曲線の長さ $I = \int_A^B ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$

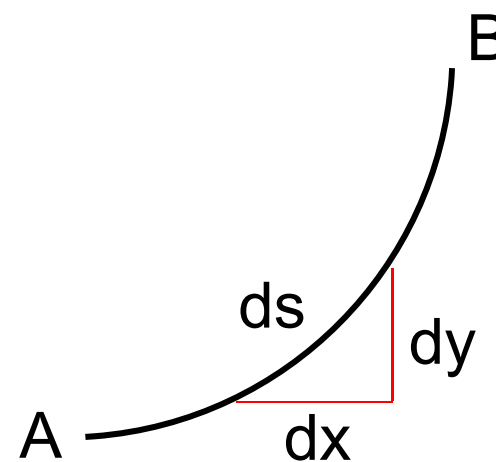
Eulerの方程式で $f(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ として

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0$$

よって $y' = \text{const}$ $\therefore y = Cx + D$

あるいは

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$



$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$$= \left\{ 1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2} \right\} (dx)^2$$



15. 変分法(15.1変分法)

例2 円柱面(半径R)上の2定点の長さが極小となる曲線を求めよ.

<解>

曲線の長さ $I = \int_{\theta_A}^{\theta_B} ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{(Rd\theta)^2 + (dz)^2} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{R^2 + z'^2} d\theta$

Eulerの方程式で $f(\theta, z, z') = \sqrt{R^2 + z'^2}$ として

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{2z'}{2\sqrt{R^2 + z'^2}} \right) = 0$$

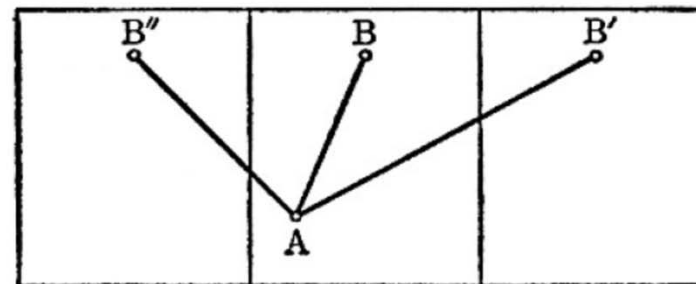
よって

$$z' = \text{const}$$

$$z = C\theta + D$$



(a)



(b)

15.1 - 2 図



15. 変分法(15.1変分法)

例3 球面(半径R)上の2定点の長さが極小となる曲線を求めよ.

<解>

曲線の長さは, 球座標(r, θ, φ)を用いて

$$I = \int_{\theta_A}^{\theta_B} ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{(Rd\theta)^2 + (R\sin\theta d\varphi)^2} = R \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{1 + \sin^2\theta \varphi'^2} d\theta$$

Eulerの方程式で $f(\theta, \varphi, \varphi') = \sqrt{1 + \sin^2\theta \varphi'^2}$ として

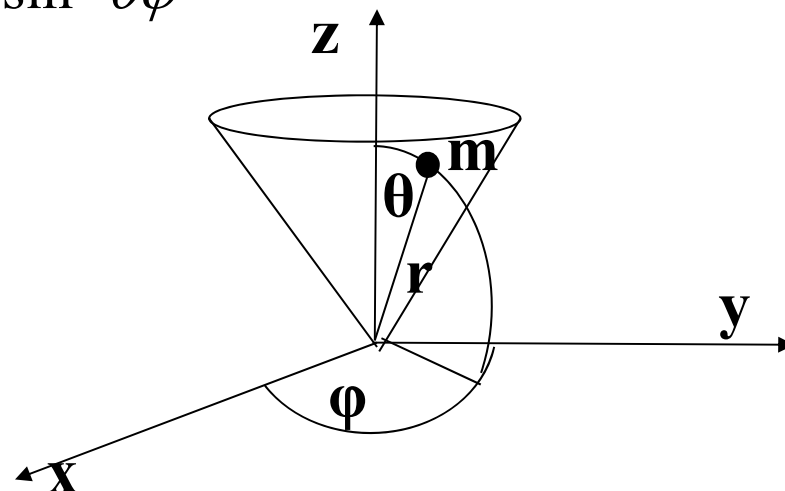
$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin^2\theta \varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2\theta \varphi'^2}} \right) = 0 \quad \frac{\sin^2\theta \varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2\theta \varphi'^2}} = \text{const} = C$$

よって $\sin^2\theta \varphi' = C \sqrt{1 + \sin^2\theta \varphi'^2}$

$$\sin^4\theta \varphi'^2 = C^2 (1 + \sin^2\theta \varphi'^2)$$

$$(\sin^2\theta - C^2) \sin^2\theta \varphi'^2 = C^2$$

$$\varphi' = \pm \frac{C}{\sin\theta \sqrt{\sin^2\theta - C^2}}$$



15. 変分法(15.1変分法)

ここで, $\cot\theta=t$ とおく $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\varphi = \int \frac{C}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - C^2}} d\theta = \int \frac{C}{\sqrt{1 - C^2(1+t^2)}} dt = -\sin^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{1/\sqrt{C^2-1}}}\right) + \alpha$$

$$\sin(\varphi - \alpha) = -\frac{t}{D} \quad D = \sqrt{1/\sqrt{C^2-1}}$$

$$D \sin(\varphi - \alpha) = -\cot\theta$$

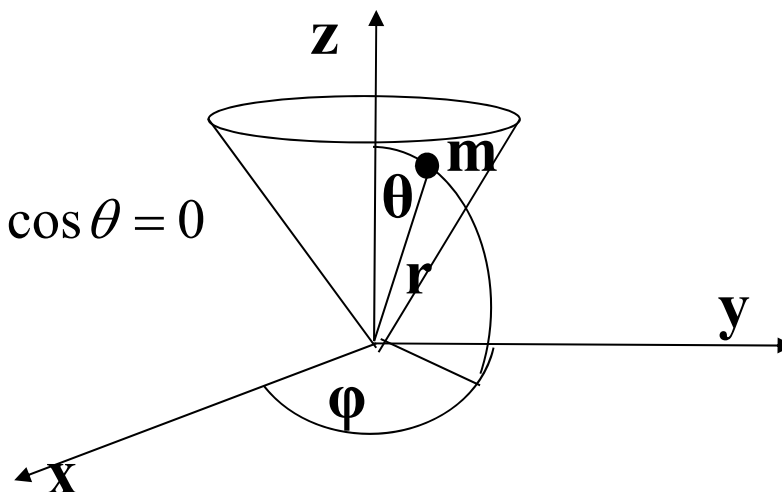
$$D \sin(\varphi - \alpha) + \cot\theta = 0$$

$$D \sin\theta \sin(\varphi - \alpha) + \cos\theta = 0$$

$$D(a \sin\theta \sin\varphi \cos\alpha - a \sin\theta \cos\varphi \sin\alpha) + a \cos\theta = 0$$

$$\underline{D(y \cos\alpha - x \sin\alpha) + z = 0}$$

この式は原点を通る平面を表している.



15. 変分法(15.1変分法)

例4 最速降下線問題をもとめよ

<解>

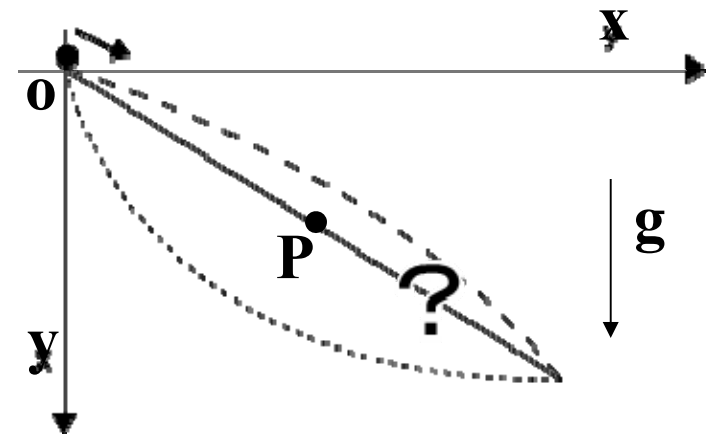
必要な時間

$$I = \int_0^{t_1} dt = \int_0^{x_1} \frac{ds}{v} = \int_0^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{2gy}}$$

Eulerの方程式で $f(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$ として

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{y} \sqrt{1+y'^2}} \right) + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}} = 0$$

よって $2y'y'' + (1+y'^2) = 0$



15. 変分法(15.1変分法)

$2y'y''+(1+y'^2)=0$ を解く

$$y' = \frac{dy}{dx} = p, \quad y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

$$\frac{2pdp}{1+p^2} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow y(1+y'^2) = a \Rightarrow \sqrt{\frac{y}{a-y}} dy = dx$$

$$y = \frac{a}{2}(1 - \cos \theta)$$

$$\sqrt{\frac{\frac{a}{2}(1 - \cos \theta)}{\frac{a}{2}(\cos \theta + 1)}} \frac{a}{2} \sin \theta d\theta = dx \Rightarrow \frac{a}{2}(1 - \cos \theta) d\theta = dx$$

初期条件 $y=0(\theta=0)$ で $x=0$

$$x = \frac{a}{2}(\theta - \sin \theta)$$

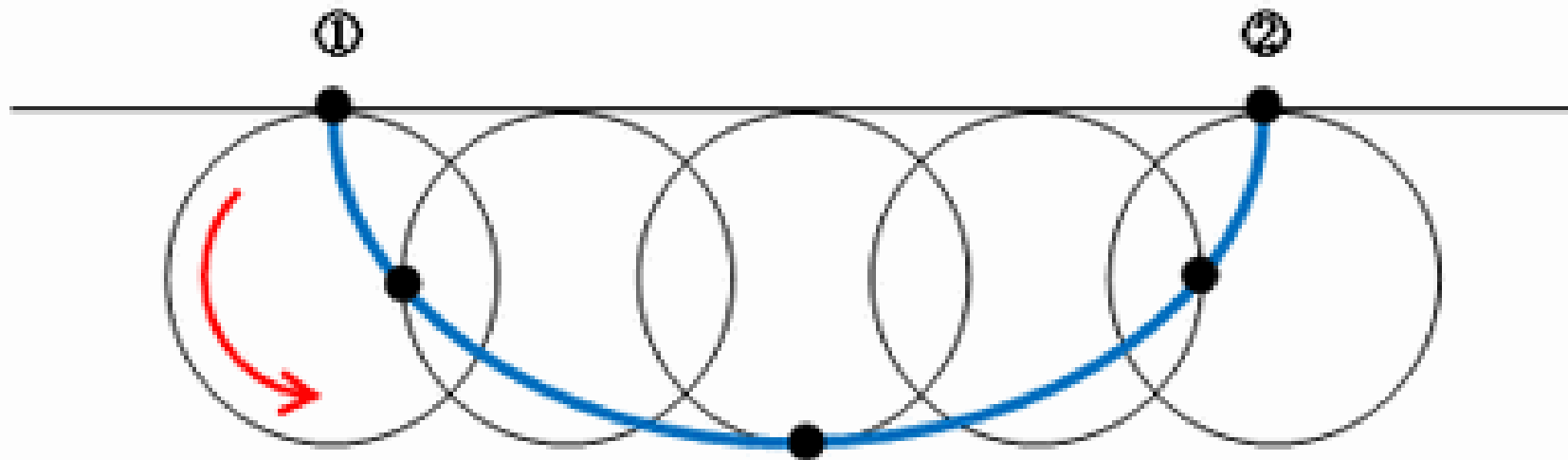


15. 変分法(15.1変分法)

以上より解はサイクロイド曲線を描く

$$x = \frac{a}{2}(\theta - \sin \theta)$$

$$y = \frac{a}{2}(1 - \cos \theta)$$



サイクロイド曲線: 1つの曲線に沿って円が転がるとき, 円周上の1点が描く曲線がサイクロイド曲線である.

15. 変分法(15.1変分法)

2つまたはそれ以上の未知関数がある場合:

汎関数は次式で表され,

$$I = \int_a^b f(x, y(x), z(x), \dots, y'(x), z'(x), \dots) dx$$

これを極小にするような関数を求めることとなる.

Eulerの微分方程式は

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$



15. 変分法(15.1変分法)

未知関数が他の拘束条件を満足しなければならない場合:
即ち積分

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

を

$$\int_a^b g(x, y, y') dx = \text{与えられた値} = I$$

が満足される範囲内で極大または極小にするような $y=y(x)$ を求める.

Lagrangeの未定乗数法

$$\delta \int_a^b \{f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')\} dx = 0$$

未定乗数 λ は次式から求める.

$$\int_a^b g(x, y, y') dx = I$$



15. 変分法(15.1変分法)

例5 重力場でつるされた両端を固定された糸の形を求めよ.

<解>

糸の長さが一定の元で糸全体の位置エネルギーが最小となる.

汎関数
$$I = \int_{-x_0}^{x_0} y ds = \int_{-x_0}^{x_0} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

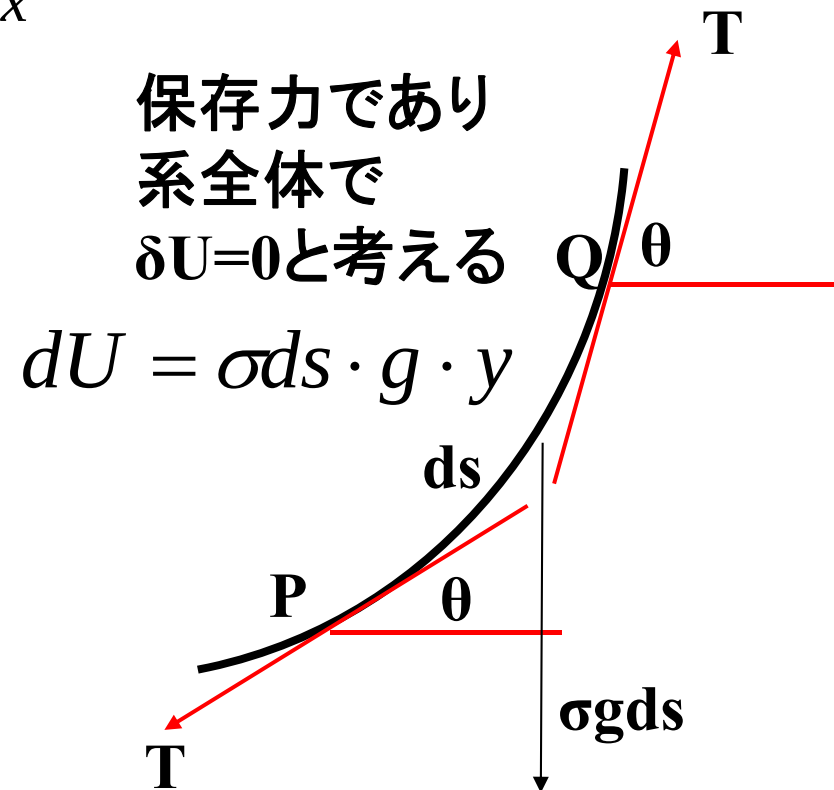
拘束条件
$$\int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2} dx = I$$

Lagrangeの未定乗数法より

$$\delta \int_{-x_0}^{x_0} (y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} dx = 0$$

Eulerの微分方程式は

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(y + \lambda) y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) - \sqrt{1 + y'^2} = 0$$



15. 変分法(15.1変分法)

$$y' = \frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{df}{dy}$$

$$p \frac{d}{dy} \left\{ \frac{(y + \lambda)p}{\sqrt{1 + p^2}} \right\} - \sqrt{1 + p^2} = 0$$

$$p \frac{\left\{ p + (y + \lambda) \frac{dp}{dy} \right\} \sqrt{1 + p^2} - (y + \lambda)p \frac{2p \frac{dp}{dy}}{2\sqrt{1 + p^2}}}{\left(\sqrt{1 + p^2} \right)^2} - \sqrt{1 + p^2} = 0$$

整理して, $\frac{dy}{y + \lambda} = \frac{p dp}{1 + p^2}$

積分して $y + \lambda = c_1 \sqrt{1 + p^2}$



15. 変分法(15.1変分法)

これから

$$\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{c_1}\right)^2 - 1}} = \pm dx$$

ここで, $\frac{y+\lambda}{c_1} = u$ とおくと $\frac{c_1 du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \pm dx$

積分すると $\operatorname{arccosh}(u) = \frac{x+c^2}{c_1}$

したがって $y = c_1 \cosh \frac{x+c_2}{c_1} - \lambda$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{\sqrt{c}} \quad c > 0$$

$$\operatorname{arccosh} \frac{x}{\sqrt{|c|}} \quad c < 0$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



15. 変分法(15.1変分法)

境界条件 $x = \pm x_0$ で $y = y_0$ より $c_2 = 0$

$$y = c_1 \cosh \frac{x}{c_1} - \lambda$$

この解を拘束条件に導入して

$$\int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-x_0}^{x_0} \cosh \frac{x}{c_1} dx = I$$

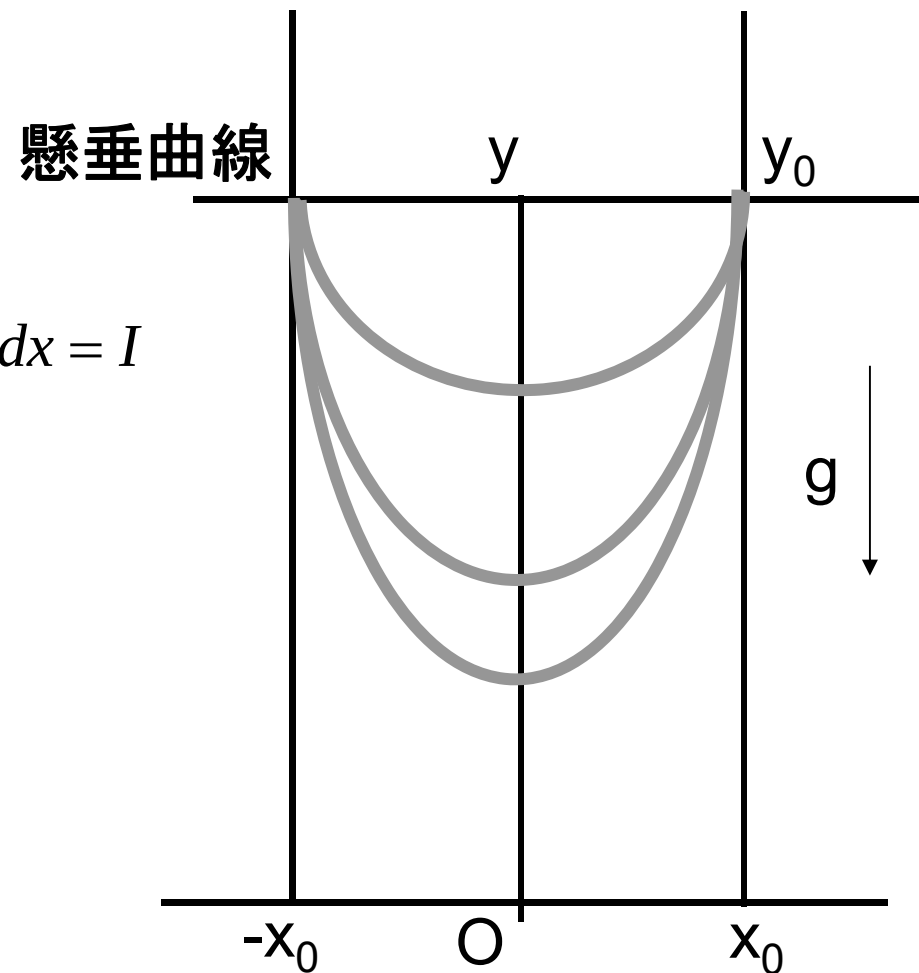
よって

$$2 \sinh \frac{x_0}{c_1} = \frac{1}{c_1}$$

上式より c_1 が決まる.

また, 解と c_1 より λ が決まる.

$$\lambda = c_1 \cosh \frac{x_0}{c_1} - y_0$$



16. ダランベールの原理(16.1ダランベールの原理)

運動の第2法則より

$$mA = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

慣性項を力の項に移項して,

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n - mA = 0$$

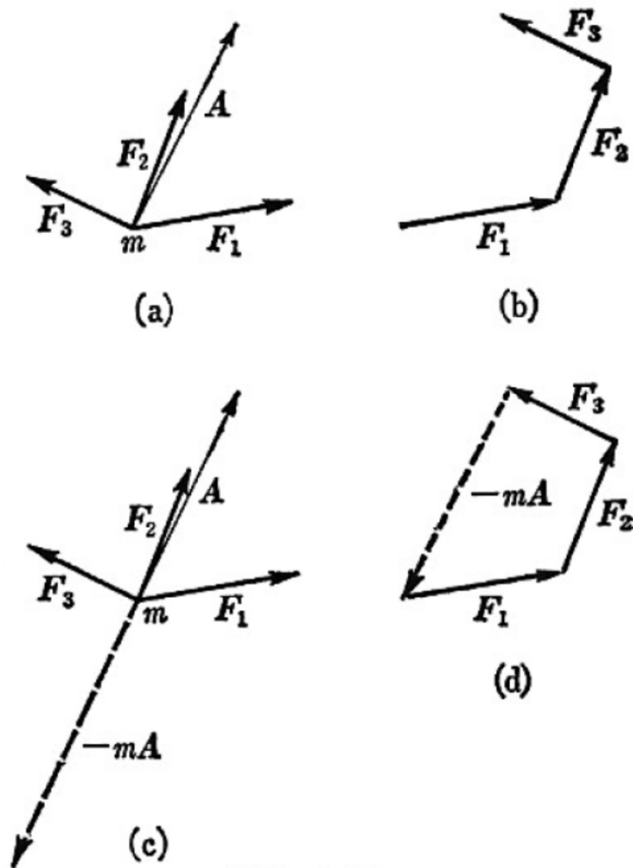
質点に働く実際の力と慣性抵抗とを合わせたものはつり合いにある力の系を形作っている.

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n - m\ddot{x} = 0$$

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n - m\ddot{y} = 0$$

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n - m\ddot{z} = 0$$

慣性抵抗は「加えられた力」の仲間に入れられる.
(束縛力でなく)



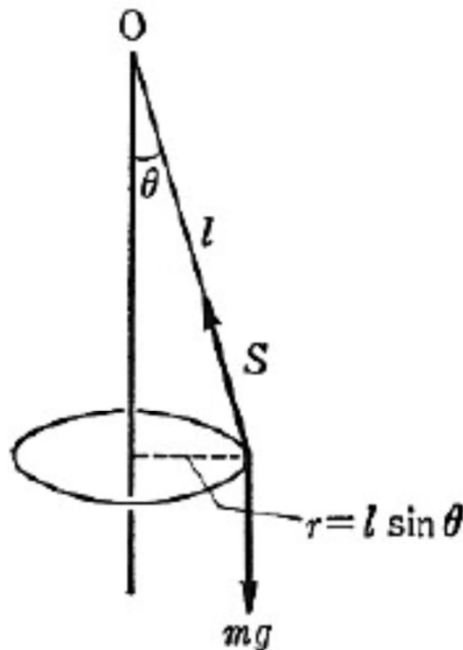
16.1-1 図

16. ダランベールの原理(16.1ダランベールの原理)

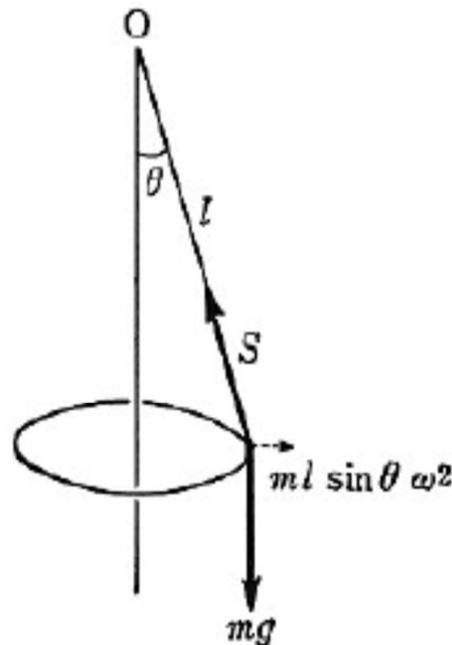
質点に働く実際の力の法線成分と、仮想的な力であるの遠心力とはつりあう。

例：円錐振り子で周方向の運動が制御されているが制御されていなければ2自由度系である。

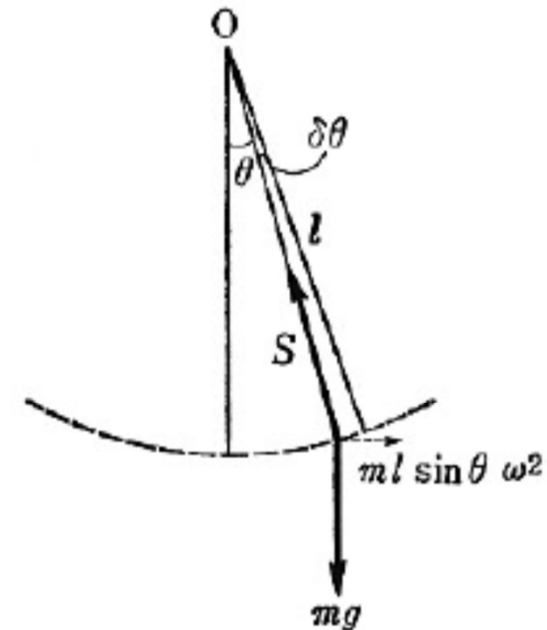
$$mV^2 / r = mr\omega^2$$



(a)



(b)



(c)

16.1 - 2 図



16. ダランベールの原理 (16.1 ダランベールの原理)

ダランベールの原理

$$ml \sin \theta \omega^2 - S \sin \theta = 0$$

$$S \cos \theta - mg = 0$$

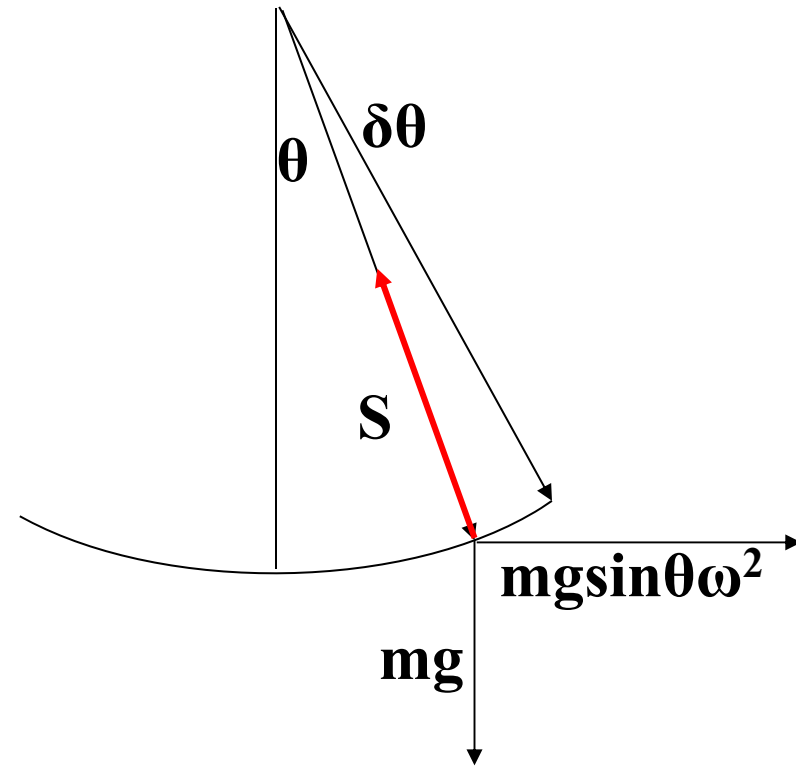
$$\omega^2 = \frac{g}{l \cos \theta}$$

仮想仕事の原理

糸の傾きを θ から $\theta + \delta\theta$ に変わる
仮想変位を考える.

$$(ml \sin \theta \omega^2) \cos \theta \times l \delta\theta - mg \sin \theta \times l \delta\theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l \cos \theta}$$



16. ダランベールの原理 (16.1 ダランベールの原理)

「つり合い」の必要十分条件を「運動力学」に拡張

Lagrangeの変分方程式 (ダランベールの原理)

$$\sum \{ (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i \} = 0$$

移項して,

$$\sum \{ m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) \} = \sum \{ X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i \}$$

特に保存力の場合

$$\sum \{ m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) \} = -dU$$

積分して

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum [\{ (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i \}] dt = 0$$



宿題

教科書16章の問題3
教科書16章の問題5

Word・一太郎等での作成OK
紙で書いたものを写真でとってもOK

